Serfiex

POSTVI™

PRECIOS PARA OPCIONES

TEORÍA Y PRÁCTICA

Madrid, 29 de Mayo 2002

Bloomberg<SERF>

Reuters<SERFIEX01>

Infobolsa<SERFIEX>

www.serfiex.es

INDICE

INDICE

1. MOTIVACIÓN

a) Avances en la teoría y práctica de valoración de opciones (solamente las opciones “estándar”).

b) Resumirlas en un programa fácil de usar.

2. RESUMEN

a) Historia breve de la valoración de opciones.

b) Fórmulas y deltas.

c) Modelos de la familia ARCH.

3. HISTORIA

• La valoración de opciones parece milagrosa: ¡Solamente se usan parámetros observables!

• La razón es que valora por *arbitraje*: Sólo dos variables / activos, y tres Precios / incógnitas. Sistema sobredeterminado.

• En todos ellos lo esencial es cómo se mueve el precio de los activos – en jerga: el proceso estocástico.

3. HISTORIA

1973 – Fisher Black y Myron Scholes descubren su "precio". Se basan en un proceso de Îto:

$$\boxed{\frac{dS}{S} = \alpha \, dt + \sigma \, dz}$$

α- Retorno esperado instantáneo (constante).

σ- Desviación estándar instantánea (constante).

dz – Variación incierta instantánea.

Además el tipo de interés es determinista.

3. HISTORIA

1973 – Robert Merton.

- Incorpora un tipo de interés estocástico. Cupón cero que madura con la opción.

$$\boxed{\frac{dR}{R} = \mu_R \, dt + \sigma_R dz_R}$$

Además de la volatilidad en el tipo de interés hay correlación con el activo subyacente.

3. HISTORIA

1987, John Hull y Alan White.

- Volatilidad estocástica.

1º. Con volatilidad independiente del precio del activo subyacente.

2º. Con volatilidad correlacionada con el precio del activo subyacente.

3. HISTORIA

1993, Robert Engle, Alex Kane, y Jaesun Noh incorporan avances econométricos al caso 1º:

1. El proceso es GARCH – la volatilidad depende de su propio pasado.
2. Incorporan una variable para tener en cuenta los días de cierre de Mercado.

1993, Amin y Victor Ng.

- Volatilidad y tipo de interés estocástico.

De la teoría a la práctica

Estas mejoras:

•*Permiten conocer mejor* (y por tanto controlar mejor) *los riesgos.*

•*Minimiza los costes de réplica* (sobre todo a largo plazo).

•*Aumenta la rentabilidad*. Engle, Kane y Noh (93) lo muestran para opciones a corto plazo sobre el S&P 500.

4. PRECIOS Y DELTAS

4.1.Black & Scholes

Para acciones y índices.

$$\boxed{CALL = C_{B-S} = S * e^{-q*T} * N(d_1) - K * e^{-r*T} * N(d_2)}$$

$$\boxed{d_1 = \frac{\ln[S/K] + (r - q + \sigma_S^2/2) * T}{\sigma_S \sqrt{T}}}$$

$$\boxed{d_2 = d_1 - \sigma_S \sqrt{T}}$$

S Precio subyacente.

K Precio de ejecución.

r Tipo de interés sin riesgo anualizado.

T Años.

σ_S Volatilidad anualizada.

q Dividendo anualizado.

4. PRECIOS Y DELTAS.

•*Delta.* El delta de una opción, : tasa de cambio de su precio con respecto al precio del subyacente.

$$\boxed{\Delta = e^{-q*T} N(d_1)}$$

4.2.- Merton.

•Única diferencia práctica con Black & Scholes en volatilidad

Black-Scholes $\sigma = \sigma_S$

Merton $\sigma = \hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_R^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_R}$

ρ - Correlación instantánea entre el subyacente y el tipo de interés.

4. 3.- Hull & White

• Volatilidad estocástica y tipo de interés sin riesgo determinista.

• Precio y volatilidad no correlacionados instantáneamente:

$$\boxed{f(S_t,\sigma_t)=\int C(\bar{\sigma})g(\bar{\sigma})d\bar{\sigma}}$$

f Precio de la opción.

$\bar{\sigma}$ Valor medio de la desviación estándar en lo que queda de tiempo hasta expiración

C Precio de Black-Scholes como función de $\bar{\sigma}$

g Función de densidad de $\bar{\sigma}$

4. PRECIOS Y DELTAS

- La distribución de $\bar{\sigma}$ no parece calculable analíticamente.

- Se usa simulación "Monte Carlo": se generan numéricamente los valores de $\bar{\sigma}$ y se calcula la distribución.

$$\boxed{f(S_t,\sigma_t) = E\left[C(\bar{\sigma})\right] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} C(S_{t+1},\bar{\sigma})}$$

C : precio Black-Scholes.

$$\boxed{\bar{\sigma}_j = (\frac{1}{\tau})\sum_{i=2}^{t+1+\tau}\sqrt{h_{t,t+i}^{j}}}$$

$h_{t,t+i}^{j}$: varianza condicional.

4. PRECIOS Y DELTAS

N : número de veces que se genera

$\boxed{\eta_{t+i,j} = \varepsilon_{t+i,j} / \sqrt{h_{t+i,j}},}$ extraída de una normal estándar.

$$i = 1,\ldots\ldots,\tau - 1,$$

$$j = 1\ldots\ldots\ldots\ldots.N.$$

Se divide el tiempo a expiración en τ intervalos (entre 1 y 5 días).

4. PRECIOS Y DELTAS

La volatilidad puede variar de muchas formas:

- Hull y White (1987):

$$\boxed{\frac{d\sigma^2}{\sigma^2} = \mu\, dt + \xi\, dw}$$

- Engle, Kane y Noh (1993):

  modelos GARCH – *Volatilidad agrupada y asimétrica.*

<u>MÁS REALISMO = MÁS BENEFICIOS</u>

1. La volatilidad persiste.

2. Los cambios negativos tienen más persistencia.

4. PRECIOS Y DELTAS

Esto se incorpora con: Egarch, Agarch, Vgarch y otros.

- También importante: días en que el mercado cierra (las noticias se “acumulan”).

- Black-Scholes formula sobre-aprecia para at-the-money (o cerca) sub-aprecia para opciones fuertemente in o out-of the money.

4. PRECIOS Y DELTAS

Ejemplo Hull-White:

Opción europea sobre activo no especificado.

Tiempo a madurez: 1 año.

Volatilidad: GARCH(1,1).

Número de subintervalos: 250 (dias trading-calendario)

Número de simulaciones, e.g: 2000.

4. PRECIOS Y DELTAS

Necesitamos 2000 muestras de longitud 249.

$$\begin{array}{cccccc}
h_{t+1,1} & h_{t+2,1} & \ldots & h_{t+249,1} & \Rightarrow & \frac{1}{249} * \sum h_{,1} = \bar{h}_{,1} \\
h_{t+1,2} & h_{t+2,2} & \ldots & h_{t+249,2} & \Rightarrow & \frac{1}{249} * \sum h_{,2} = \bar{h}_{,2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \Rightarrow & \ldots \quad \ldots \\
h_{t+1,2000} & h_{t+2,2000} & \ldots & h_{t+249,2000} & \Rightarrow & \frac{1}{249} * \sum h_{,2000} = \bar{h}_{,2000}
\end{array}$$

$\bar{h}_{,1}$ media aritmética de fila 1.

$\bar{h}_{,2}$ media aritmética de fila 2.

$\bar{h}_{,2000}$ media aritmética de fila 2000.

Calculamos 2000 Black-Scholes, una para cada $\sqrt{\bar{h}}$, y su media para obtener el precio P_1

- Variables antitéticas.
- Deltas medios de Black-Scholes.

4. PRECIOS Y DELTAS

4.4.- Amin &Ng.

•Volatilidad estocástica y tipo de interés estocástico.

•Como Hull & White: Black-Scholes esperada, ahora con dos procesos estocásticos.

$$\boxed{\Pi = E\left\{S * N\left[d_1(G_T)\right] - K * \exp(-R(G_T)T) * N\left[d_2(G_T)\right]\right\}}$$

$$\boxed{d_1(G_T) = \frac{\ln\left[S/(K * \exp(-R(G_T)T\right] + \frac{1}{2} * \bar{h}_s(G_T)T}{\left[\bar{h}_s(G_T)T\right]^{1/2}}}$$

$$\boxed{d_2(G_T) = d_1(G_T) - \bar{h}_s(G_T)T}$$

Proceso estocástico:

$$\boxed{R(G_T) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{r_t}{T}} \qquad \boxed{\bar{h}_t(G_T) = \sum_{t=1}^{T} \frac{h_{s,t}}{T}}$$

•Movimiento browniano geométrico.

•Familia GARCH.

4.5.- Valoración neutral al riesgo.

- Hasta ahora: medias de Black-Scholes.
- Aquí: se va al final desde cada punto y se calculan valores esperados finales por simulación
- Se puede hacer con o sin volatilidad estocástica.
- Especialmente útil para calcular coberturas y hacer réplica dinámica.

4. PRECIOS Y DELTAS

En este sentido conviene destacar una importante característica de POSTVI™ es que permite distinguir entre días naturales y días de trading y para ello incluye un **Calendario.**

Los modelos de valoración numéricos y los neutrales al riesgo exigen el uso intensivo de técnicas de simulación Monte Carlo y van a permitir considerar:

- Días naturales para valorar el precio de una opción debido a los tipos de interés (se paga y recibe intereses los festivos y fines de semana).
- Días de trading para valorar el precio de una opción debido a la volatilidad (únicamente existe cuando el mercado está abierto).

5. MODELOS ARCH

5.1. Medias y varianzas: condicionales e incondicionales.

Con: $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$

$|\rho| \prec 1$

$\varepsilon_t \to N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Esperanza incondicional $\boxed{E(y_t) = \dfrac{\alpha}{(1-\rho)}}$

Varianza incondicional $\boxed{\mathrm{var}(y_t) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\rho^2)}}$

Dado un conjunto de información Ω_{t-1} en t-1;

$\Omega_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...\}$

La esperanza condicional: $\boxed{E(y_t|\Omega_{t-1}) = E_{t-1}y_t = \alpha + \rho y_{t-1}}$

la varianza condicional: $\boxed{\mathrm{var}(y_t|\Omega_{t-1}) = \mathrm{var}_{t-1}(y_t)}$

5.2. Modelo ARCH univariante. Engle(1982)

Sea un proceso con momentos condicionales;

$\boxed{E_{t-1}\varepsilon_t = 0}$ y $\boxed{E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t^2}$

Suponiendo $h_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2$ con $\delta_0, \delta_1 \geq 0$ y $|\delta_1| < 0$, tenemos un modelo ARCH de primer orden, o ARCH(1).

Generalizando a ARCH(p) tenemos;

$$\boxed{h_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \delta_p \varepsilon_{t-p}^2}$$

con $\delta_0, \delta_i \geq 0$

para $i = 1, ..., p.$

5. MODELOS ARCH

5.3. El modelo ARCH generalizado: GARCH. Bollerslev (1986).

GARCH(1,1).

$$\boxed{h_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \Theta_1 h_{t-1}^2}$$

con $\delta_0, \delta_1, \Theta_1 \geq 0$ y $|\Theta_1| < 0$

GARCH(p,q).

$$\boxed{h_t^2 = \delta_0 + \sum_{i=1}^{q} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \Theta_i h_{t-i}^2}$$

donde $p \geq 0, q \geq 0, \delta_0 > 0,$

y $\delta_i \geq 0 \quad i = 1,....q; \quad \Theta_i \geq 0 \quad i = 1,....p;$

5.4. GARCH-en-media o GARCH-M.

Cambios en la media afectan a la varianza.

$$y_t = \alpha + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 h_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

$$h_t^2 = \delta_0 + \sum_{i=1}^{q} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \Theta_i h_{t-i}^2$$ donde

$$\Theta_i \geq 0$$

$p \geq 0, q \geq 0, \delta_0 > 0,$ y $\delta_i \geq 0$ $i = 1,\ldots.q;$

$\Theta_i \geq 0$

A continuación Modelos GARCH asimétricos, que permiten distintos impactos de innovaciones positivas y negativas.

5.5. GARCH exponencial o EGARCH. (Nelson,1991)

$$\ln h_t^2 = \delta_0 + \sum_{i=1}^{p} \Theta_i \ln h_{t-i}^2 + \sum_{j=0}^{q} \delta_j \left[\xi_{t-j} + \Psi\left(\left| \xi_{t-j} \right| - \sqrt{2/\pi} \right) \right]$$

$$\xi_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_{t-1}}$$

Asimetría capturada por Ψ

El coeficiente con error positivo es: $\delta_j (1+\Psi)$, con error negativo $\delta_j (1-\Psi)$

Ψ positivo (negativo) implica que innovaciones positivas (negativas) tienen mayor impacto.

EGARCH(1,1)

$$\ln h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 \ln h_{t-1}^2 + \delta_1 \xi_{t-1} + \delta_2 (\left| \xi_{t-1} \right| - \sqrt{2/\pi})$$

$$\xi_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_{t-1}}$$

5.6. Otros modelos asimétricos.

AGARCH(1,1)

$$\boxed{h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 h_{t-1}^2 + \delta_1 (\varepsilon_{t-1} + \Psi)^2}$$

NGARCH(1,1)

$$\boxed{h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 h_{t-1}^2 + \delta_1 (\varepsilon_{t-1} + \Psi * \sqrt{h_{t-1}^2})^2}$$

VGARCH(1,1)

$$\boxed{h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 h_{t-1}^2 + \delta_1 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}} + \Psi\right)^2}$$

5.7. GARCH parcialmente no paramétrico:

PNP-GARCH

$$h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 h_{t-1}^2 + \sum_{i=0}^{4} \phi_i P_{it-1}(\varepsilon_{t-1} - i\sigma) + \sum_{i=0}^{4} \delta_i N_{it-1}(\varepsilon_{t-1} + i\sigma)$$

$$P_{it} = 1 \text{ if } \varepsilon_t \succ i\sigma, 0 \text{ en otro caso}$$

$$N_{it} = 1 \text{ if } \varepsilon_t \prec -i\sigma, 0 \text{ en otro caso}$$

- PNP-GARCH Más flexible, pero puedo sobre-ajustar.

5.8. Glosten, Jagannathan y Runkle (1989) GJR.

$$h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 h_{t-1}^2 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \Psi S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2$$

$$S_t^- = 1 \text{ if } \varepsilon_t \prec 0, S_t^- = 0 \text{ en otro caso}$$

REFERENCIAS

Black & Scholes (1973): “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*.

Merton (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*.

Hull & White (1987): “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility”, *Journal of Finance.*

Engle, Kane and Noh (1993): “A test of efficiency for the S&P 500 Index option market using variance forecasts” NBER Working paper.

Amin and Ng (1993): “Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility”, *Journal of Finance*.

TEST

CONTAR CON MODELOS MÁS CORRECTOS DE VALORACIÓN VA A PERMITIR:

- Mejorar exante la identificación de los activos infra o sobrevalorados
- Mejorar expost los resultados de las políticas de cobertura

Experimentar ganancias siguiendo la primera línea parece obvio.

No es tan obvio la segunda.

Para ello hemos definido el siguiente test:

Periodo muestral: 2 años

Frecuencia: diaria

Subyacente: Ibex

Volatilidad Histórica: 25,95%

Modelo ARCH: $h_t^2 = 0.0002322 + 0.117\ \varepsilon_{t-1}^2$

Modelo GARCH: $h_t^2 = 0.0000119 + 0.0909\varepsilon_{t-1}^2 + 0.862 h_{t-1}^2$

Hemos simulado la venta de una opción Call -at the money- en fecha 2 de enero de 2002 de hipotético vencimiento el 23 de mayo de 2002 y calculado sus costes diarios de réplica–delta- acumulados hasta vencimiento:

BS…………………….. 391

HW ARCH1…………. 387

HW GARCH1……….. 382

RNV ARCH1………… 372

RNV GARCH1………. 376

Interpretación:

Un punto de volatilidad, para esta opción, serían unas 20 unidades monetarias, por tanto estamos hablando de alrededor de 0,5 (0,2-1) punto de volatilidad de ingresos extraordinarios AL REPLICAR de forma más precisa

¡PARECE ATRACTIVO¡